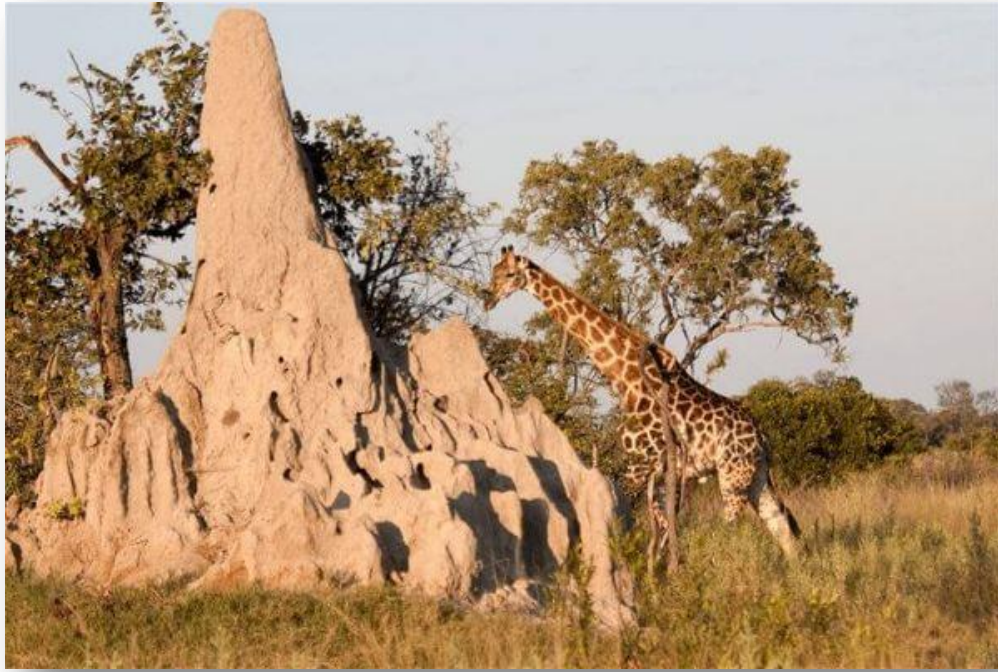


Modelowanie zjawisk kolektywnych

Struktury

dr hab. Piotr Fronczak



Nie wszystkie struktury są wynikiem zjawisk kolektywnych



Centralne twierdzenie graniczne!



Morfogeneza

Hydra – klucz do nieśmiertelności

Powstawanie struktur biologicznych zależy od dwóch czynników:

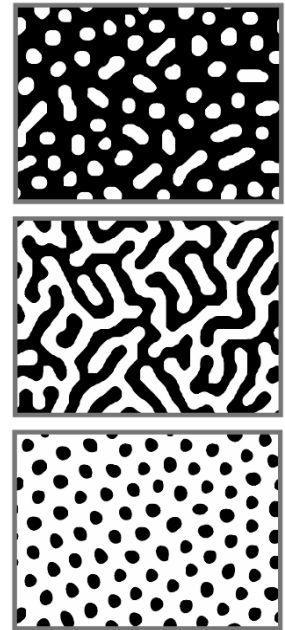
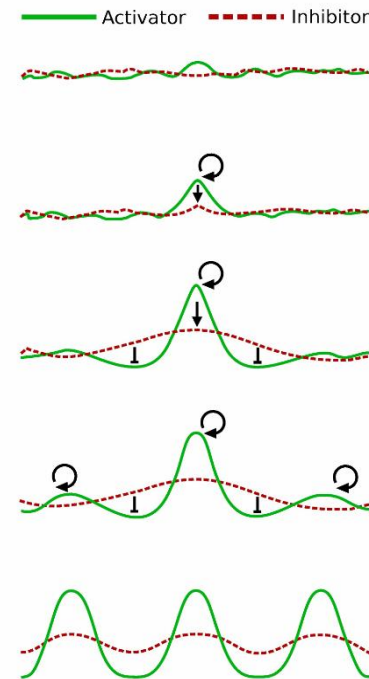
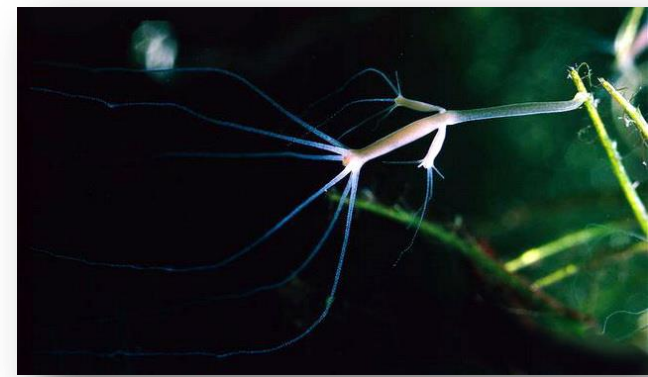
- chemicznej aktywacji (wskutek autokatalizy) o krótkim zasięgu
- mechanizmu blokowania (inhibicji) o długim zasięgu.

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \rho \frac{a^2}{h} - \mu_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \rho_a$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \rho a^2 - \mu_h h + D_h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \rho_h$$

wolno
dyfundujący
aktywator

szybko
dyfundujący
inhibitor

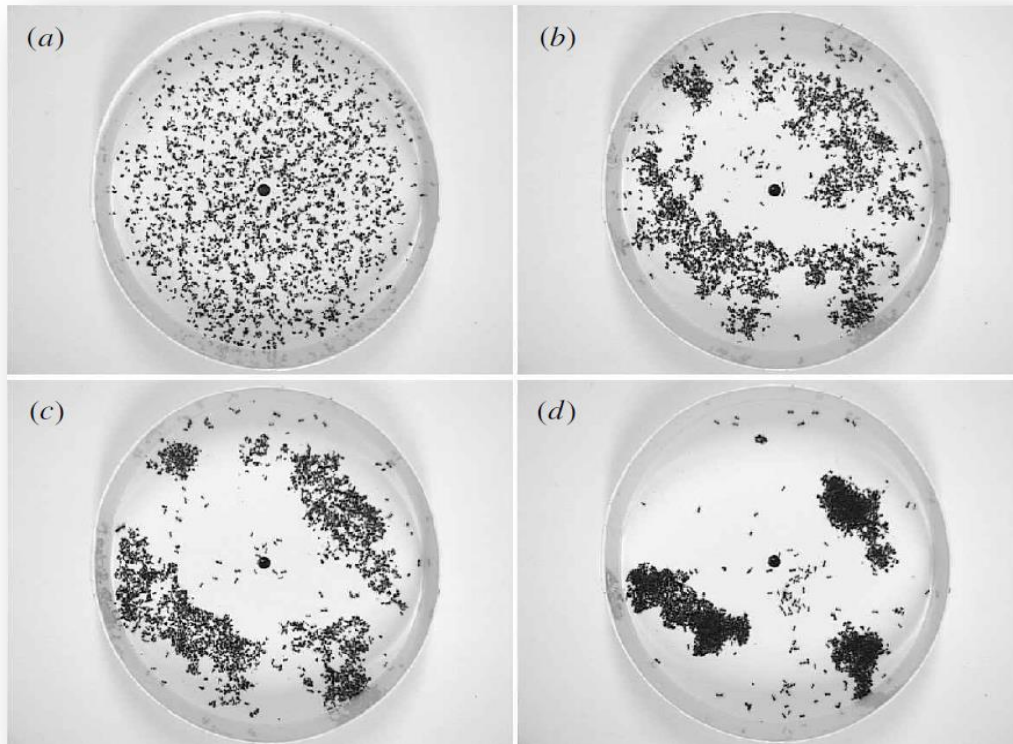


Fragment tkanki zaczyna się nieco różnić od otoczenia i wydziela niewielką ilość aktywatora, którego stężenie gwałtownie wzrasta wskutek autokatalizy (sprzężenie zwrotne dodatnie).

Duże stężenie aktywatora sprawia, że w tym obszarze powstaje inhibitor, który dyfunduje do tkanki otaczającej wybrany fragment i blokuje tam produkcję aktywatora.

Cmentarze mrówek

Liczne gatunki mrówek usuwają zwłoki z gniazda i agregują je w pobliżu wejścia do gniazda.



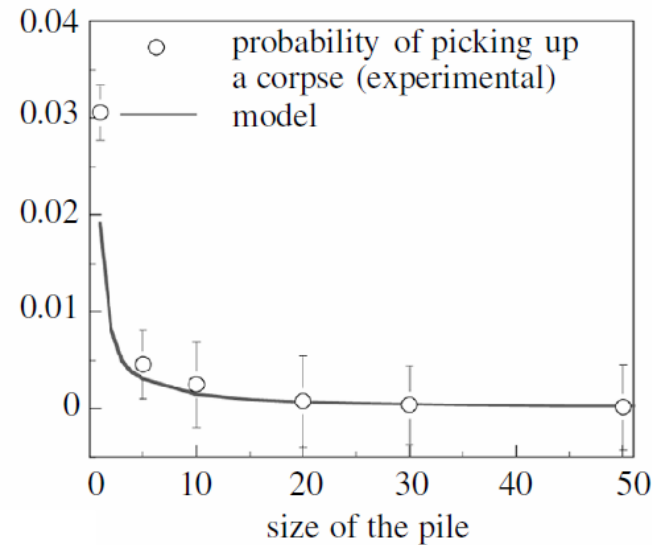
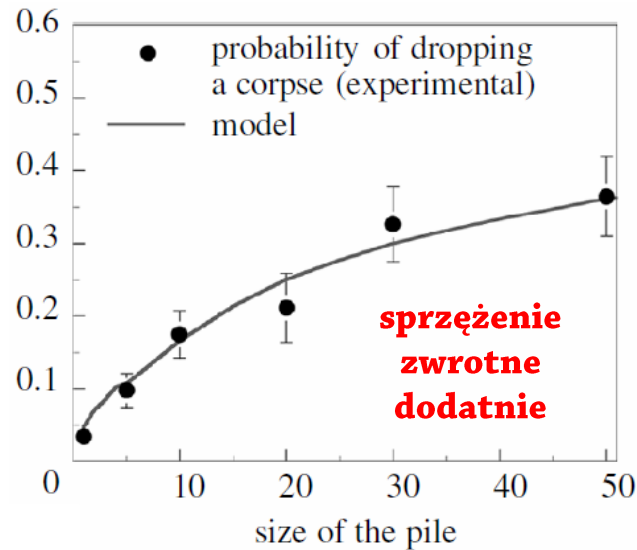
G. Theraulaz, J. Gautrais, S. Camazine, J.L. Deneubourg

The formation of spatial patterns in social insects: from simple behaviours to complex structures

Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci. vol. 361(1807):1263-82 (2003)

Cmentarze mrówek

Robotnice podnoszą lub upuszczają zwłoki z prawdopodobieństwem, które zależy od lokalnej gęstości ciał:



$$p_{drop}(r) = k + \frac{\alpha_1 \varphi(r)}{\alpha_2 + \varphi(r)}$$

upuszczenie
spontaniczne

$$p_{pick}(r) = \frac{\alpha_3 \varphi(r)}{\alpha_4 + \varphi(r)}$$

średnia liczba zwłok
w promieniu Δr

$$\varphi(r) = \frac{1}{S} \int_{r-\Delta r}^{r+\Delta r} c(r') dr'$$

G. Theraulaz, J. Gautrais, S. Camazine, J.L. Deneubourg

The formation of spatial patterns in social insects: from simple behaviours to complex structures

Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci. vol. 361(1807):1263-82 (2003)

Cmentarze mrówek

Tempo porzucania zwłok w punkcie r :

$$f(c, a) = a(r) \cdot p_{drop} - \rho \cdot p_{pick}$$

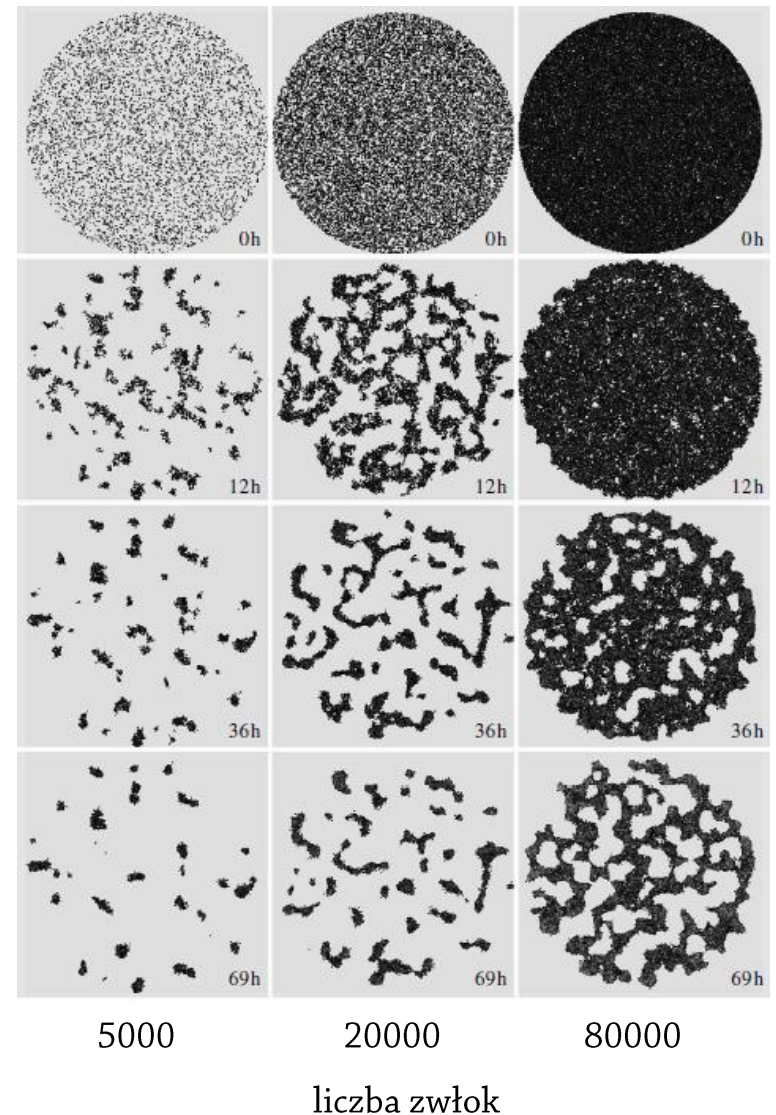
liczba mrówek
niosących zwłoki

liczba pozostałych
mrówek (znacznie
większy rezerwuar)

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} = f(c, a) \\ \frac{\partial a}{\partial t} = -f(c, a) + D\Delta a \end{cases}$$

laplasjan (dyfuzja mrówek
noszących zwłoki)

Są to równania tego samego typu co
równania aktywacji-inhibicji

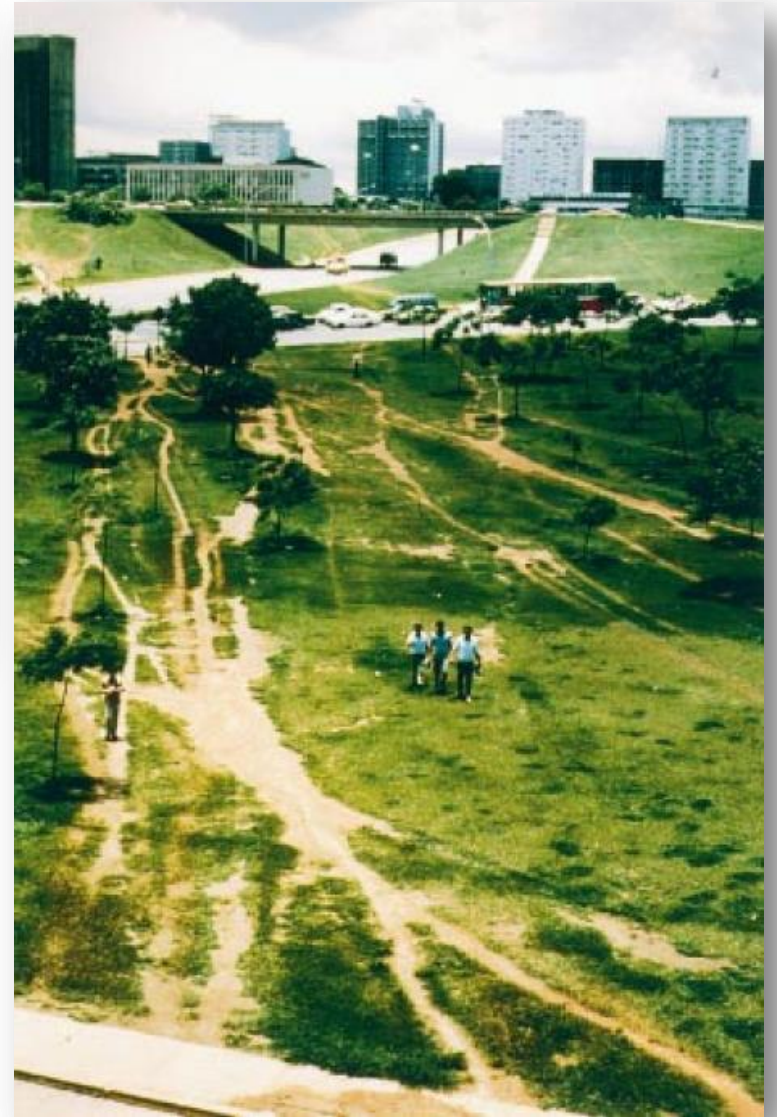


G. Theraulaz, J. Gautrais, S. Camazine, J.L. Deneubourg

The formation of spatial patterns in social insects: from simple behaviours to complex structures

Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci. vol. 361(1807):1263-82 (2003)

Wydeptywanie szlaków i ścieżek



D. Helbing, J. Keltsch, P. Molnar
Modelling the evolution of human trail systems
Nature vol. 388, pp. 47-50 (1997).

Model ewolucji ścieżek – wersja uproszczona

Agenci poruszają się w (trawiastej) przestrzeni \mathbb{R}^2 . Przyjmujemy dwa założenia. Agenci:

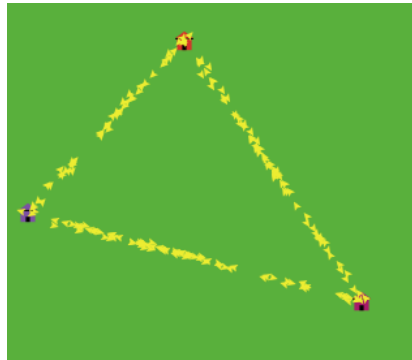
- kierują się ku swoim celom. Gdy dotrą do celu, wybierają nowy cel;
- wolą wydeptane ścieżki (są przyciągani lokalnie do wydeptanych ścieżek, którymi przemieszczali się ostatnio inni agenci).

$$T_{t+1}(\vec{r}) = \lambda T_t(\vec{r}) + (1 - \lambda) \mu \sum_i \delta(\vec{r}_i - \vec{r})$$

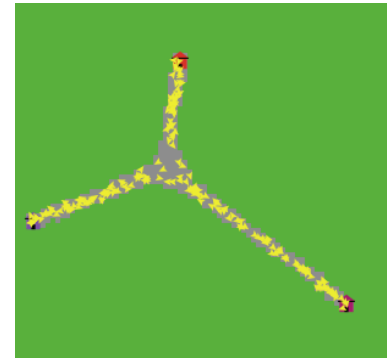
Trawa odrasta ze
stałym tempem λ .

Agent i znajdując się w punkcie \vec{r} (wtedy $\delta = 1$)
wydeptuje trawę T z intensywnością $(1 - \lambda)\mu$,
sprawiając, że ścieżka jest coraz bardziej widoczna.

$\lambda = 1$



$\lambda < 1$

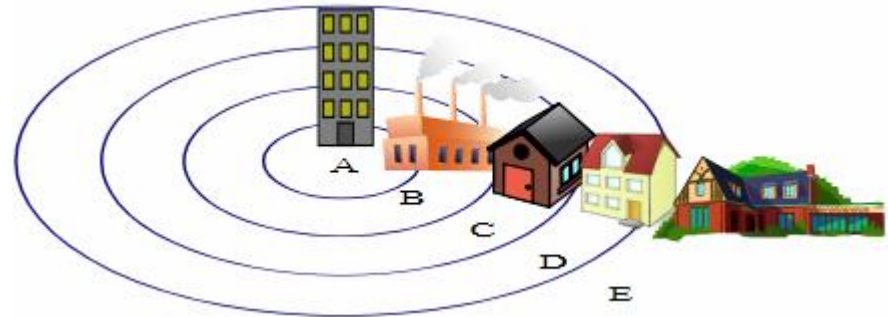


Struktury urbanistyczne

Model koncentryczny

(Ernest Burgess, 1925)

- epoka przed-samochodowa
- miasta amerykańskie

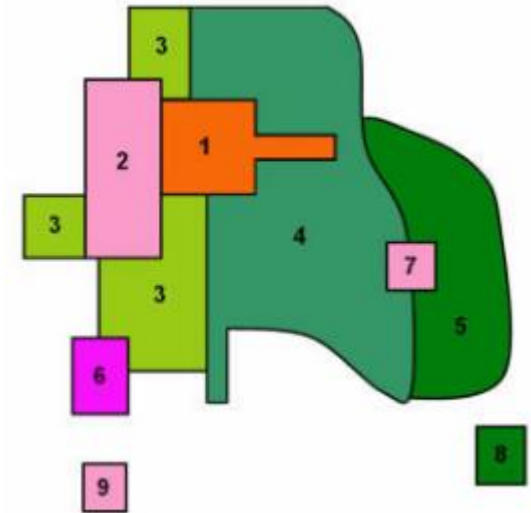
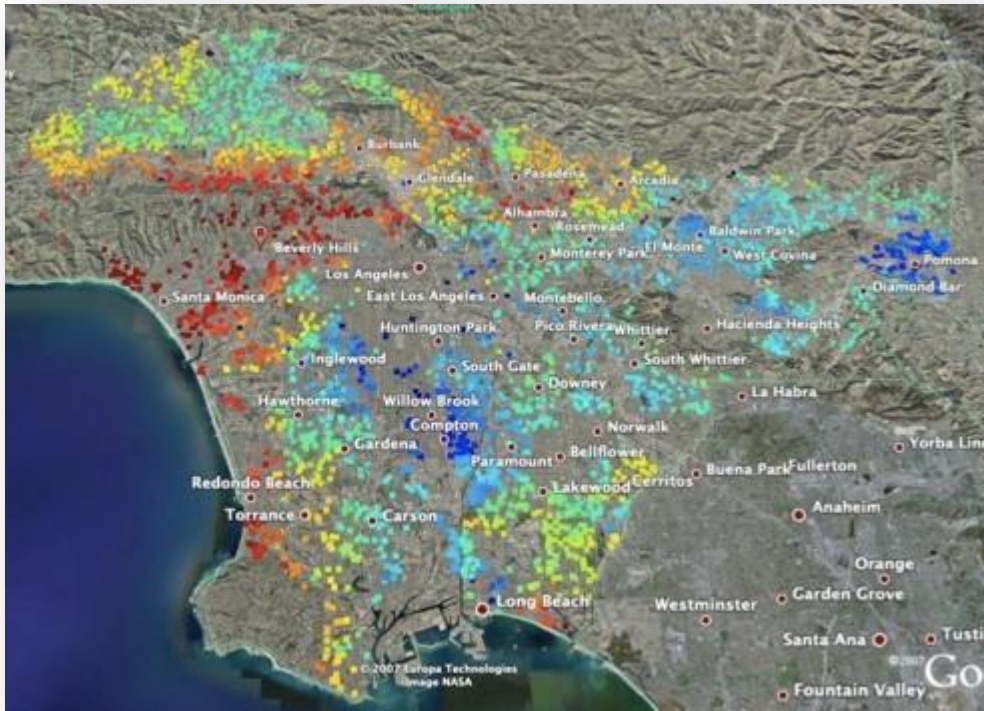


- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| I - Loop (downtown) | IV - Working class zone |
| II - Factory zone | V - Residential zone |
| III - Zone of transition | VI - Commuter zone |

Struktury urbanistyczne

Model wielordzeniowy

(Chauncey Harris, 1945)



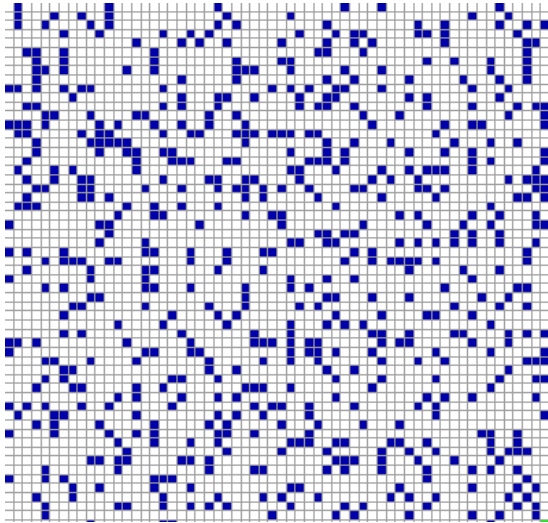
1. centrum biznesowe
2. usługowa
3. mieszkaniowa kl. niższej
4. mieszkaniowa kl. średniej
5. mieszkaniowa kl. wyższej
6. przemysłowa
7. lokalne centrum biznesowe
8. podmiejska
9. lotnisko

Model perkolacyjny

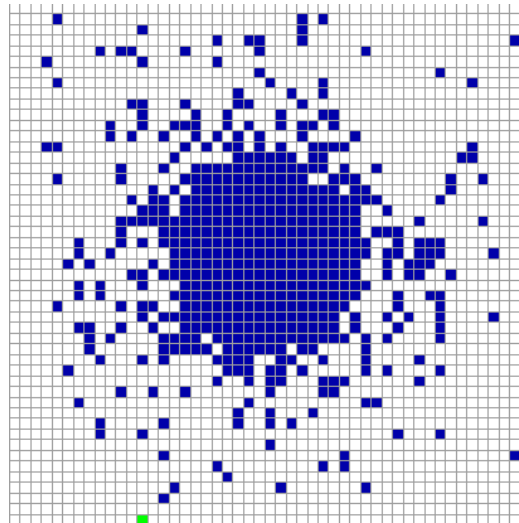
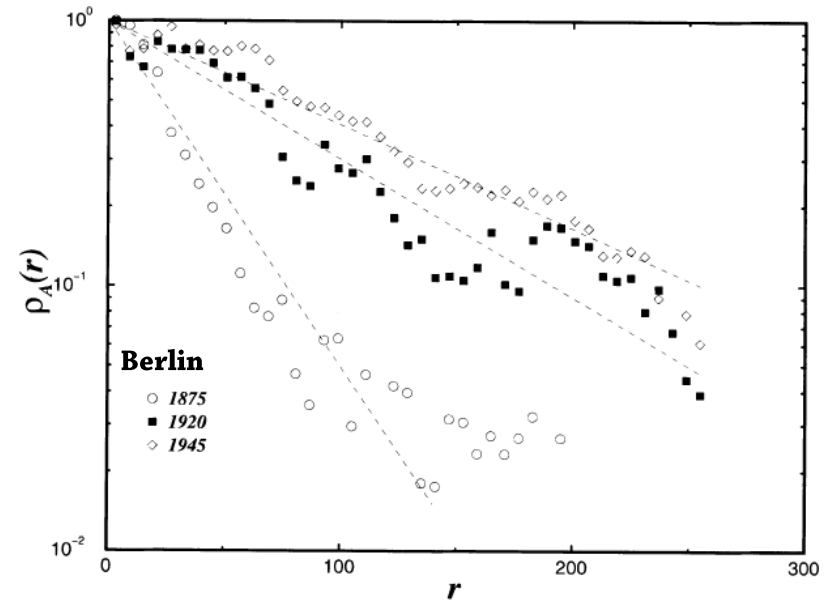
(Makse, Stanley, 1995)

W klasycznym zagadnieniu perkolacji prawdopodobieństwo zapełnienia pola $p = \text{const.}$

Stawiamy punkt, gdy zmienna losowa $U < p$



W przypadku miast gęstość populacji $p(r) = p_0 e^{-\lambda r}$.



Stawiamy punkt, gdy zmienna losowa $U < p(r)$

W przypadku miast prawdopodobieństwo nowego obiektu jest skorelowane z istnieniem lokalnej infrastruktury.

Zmienne losowe powinny być przestrzennie skorelowane

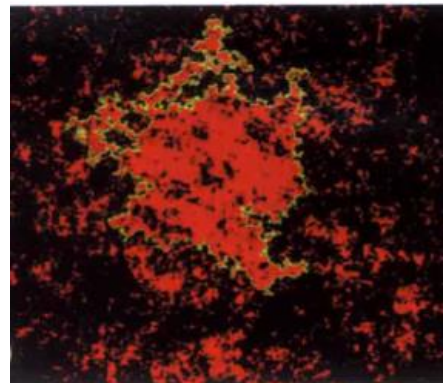
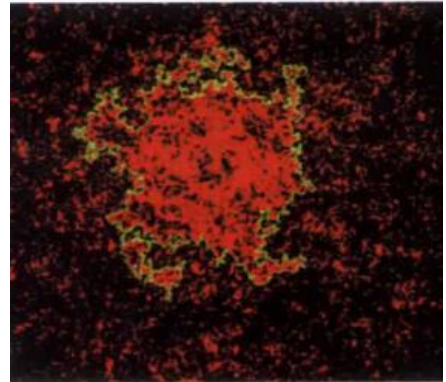
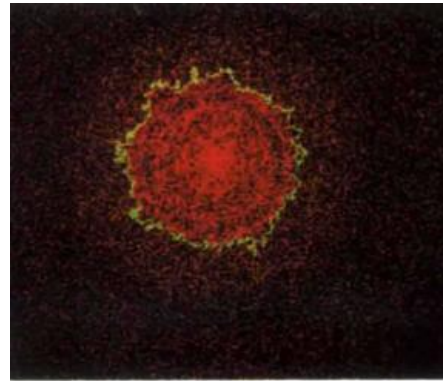
$$\langle U_x U_{x+r} \rangle \sim C_r.$$

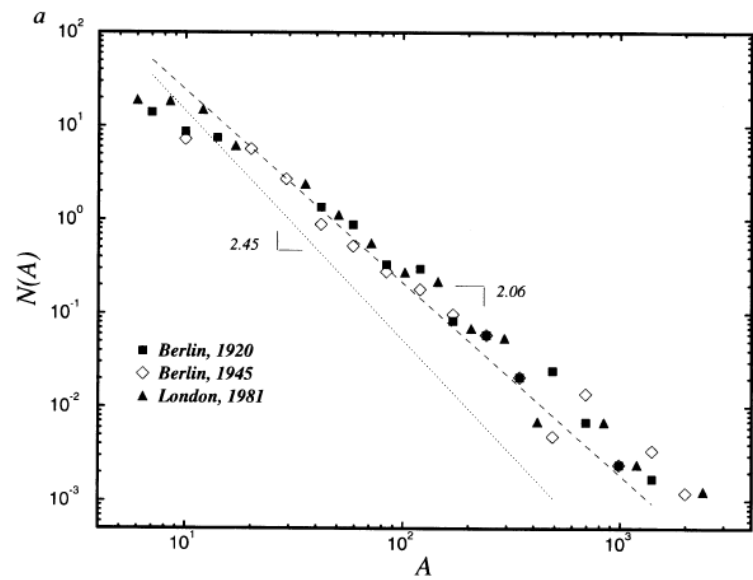
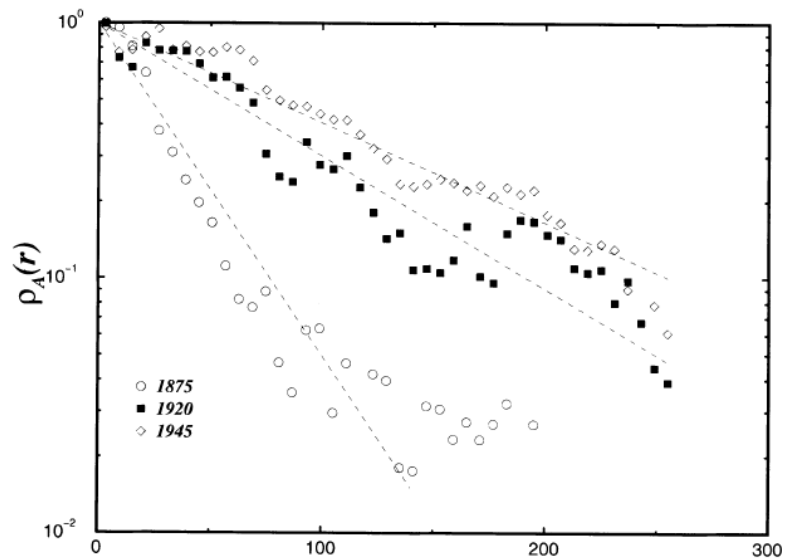
Niech profil korelacyjny $C_r \sim |r|^{-\alpha}$

Musimy spleść ten profil z rozkładem zmiennych nieskorelowanych.

Algorytm:

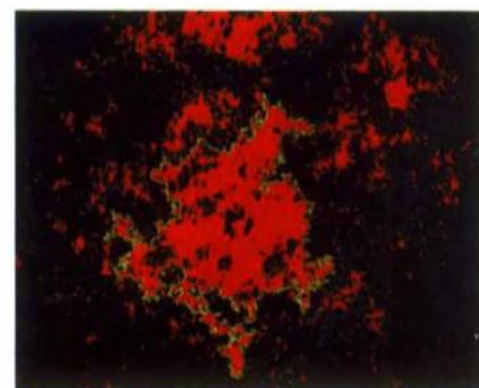
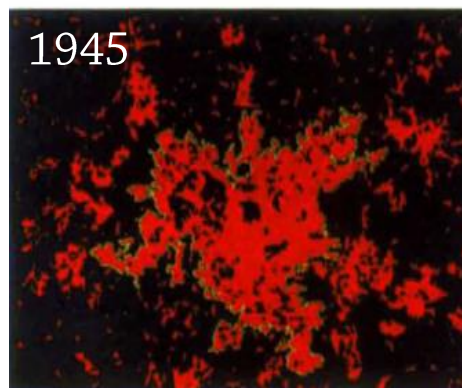
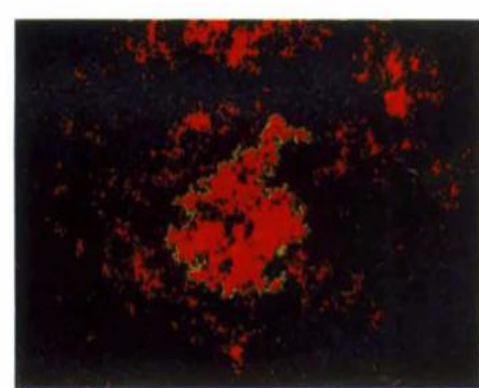
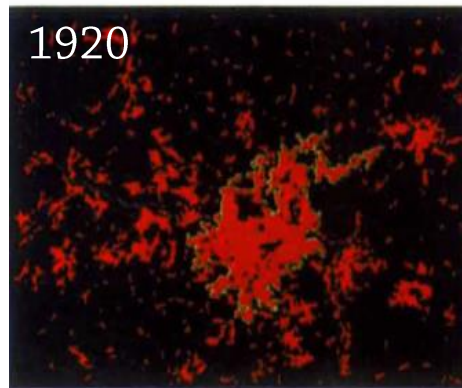
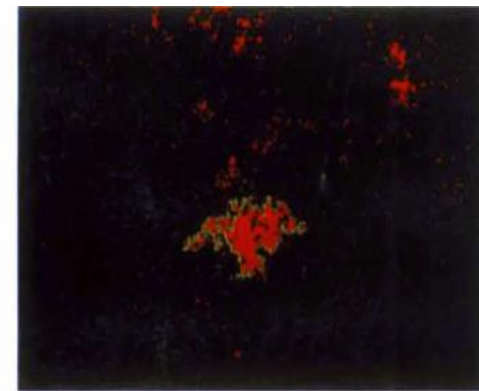
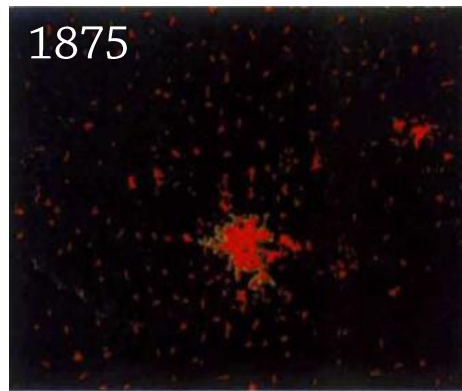
- Generujemy rozkład zmiennych nieskorelowanych U_r
- Dokonujemy transformaty Fouriera $U_r \rightarrow U_k$ (dyskretnej)
- Dokonujemy transformaty Fouriera $C_r \rightarrow C_k$ (dyskretnej)
- $\Phi_k = \sqrt{C_k} U_k$
- Dokonujemy transformaty odwrotnej $\Phi_k \rightarrow \Phi_r$





H. A. Makse, S. Havlin, E. Stanley
 Modelling urban growth patterns
Nature vol. 377, pp. 608 (1995).

model



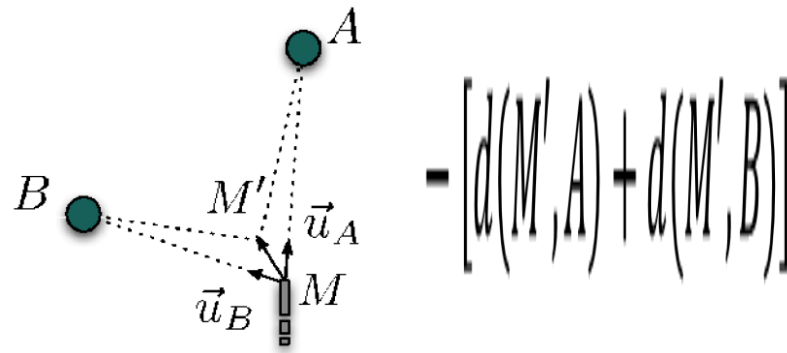
Struktury urbanistyczne

Samoorganizacja vs. planowanie



Model ewolucji ulic

1. Co okres $\tau_c > 1$ w losowych miejscach powstaje n nowych obiektów (domy, sklepy).
2. Nowe (kwantowe) segmenty dróg powstają z krokiem czasowym $\tau_R = 1$.
 - ograniczony horyzont czasowy planistów
 - algorytm tworzenia segmentów dróg oparty na lokalnej optymalizacji: prowadzimy drogi do obiektów niepodłączonych do sieci w sposób wymagający najmniejszej liczby odcinków



Każdy niepodłączony obiekt i wybiera najbliższy segment drogi M_i .

Jeśli M_1 i M_2 różne, to nowe segmenty będą budowane wzdłuż prostych prowadzących do A i B.

Jeśli $M_1 = M_2 = M$, to budujemy segment, który zmaksymalizuje redukcję odległości

$$\Delta = [d(M, A) + d(M, B)] - [d(M', A) + d(M', B)]$$

$$\overrightarrow{MM'} \propto \overrightarrow{u_A} + \overrightarrow{u_B}$$

Gdy $\overrightarrow{u_A} + \overrightarrow{u_B} \approx 0$, prowadzimy dwie drogi do A i B

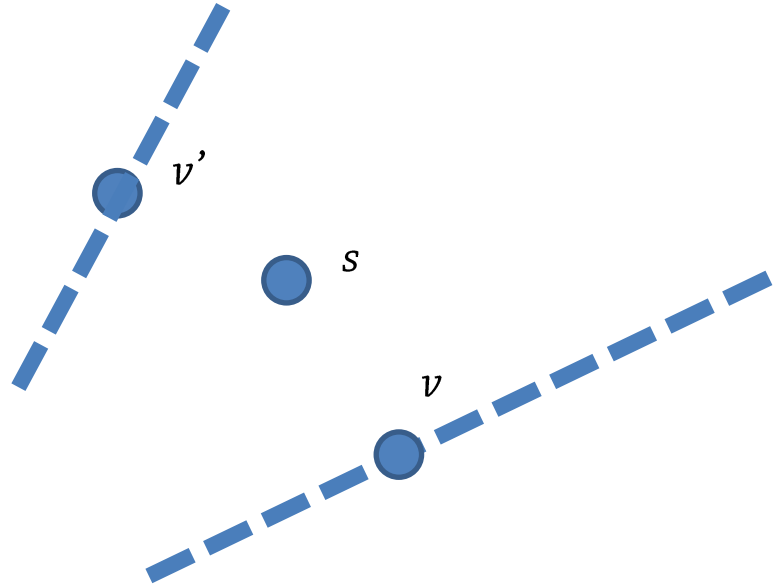
Model ewolucji ulic

Uzyskana struktura – drzewo (ekonomiczne, ale niewydajne).

By utworzyć pętle zakładamy, że niepołączony obiekt s może uruchomić budowę segmentów v spełniających warunek

$$d(v, s) < \max[d(s, u), d(v, u)]$$

gdzie u - dowolny inny segment istniejącej drogi (v jest lokalnym sąsiadem s).



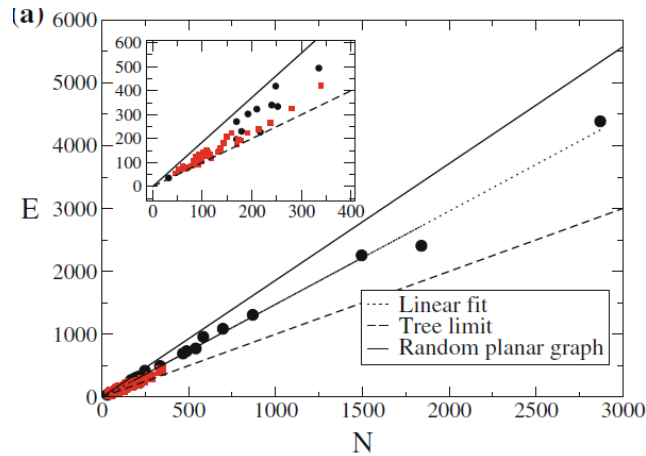
Gdy wszystkie aktywowane przez obiekt odcinki dróg zakończą swoją budowę (obiekt uzyska połączenie do sieci), obiekt staje się nieaktywny (nie stymuluje budowy nowych segmentów).

Uniform distribution in a square



Marc Barthelemy and Alessandro Flammini
Modeling Urban Street Patterns
Physical Review Letters vol. 100, 138702 (2008)

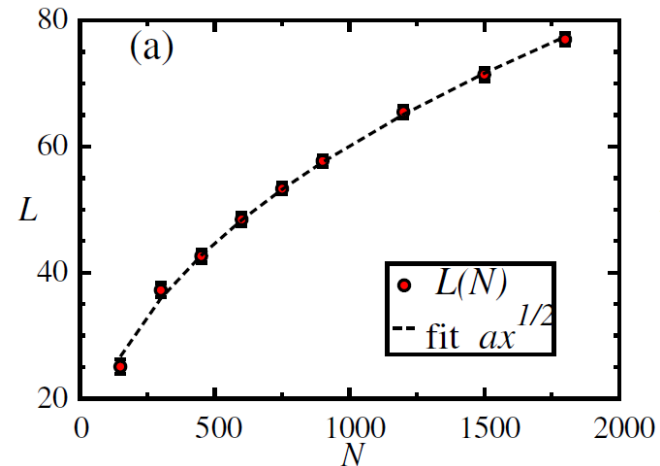
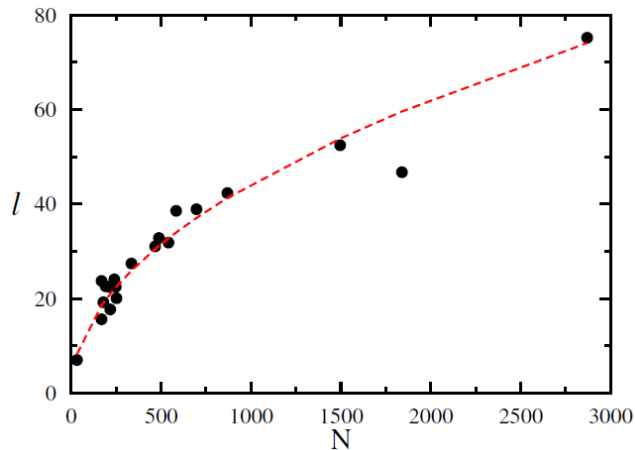
Liczba odcinków a liczba skrzyżowań i obiektów



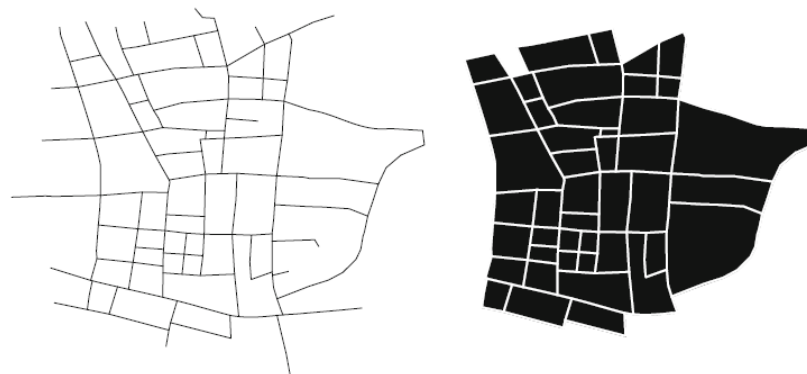
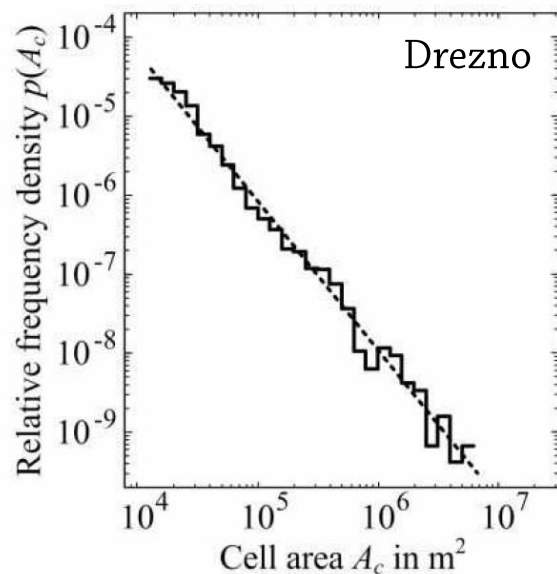
Model:

$$\frac{E}{N} = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \rightarrow 0 \\ 1.25 & \text{dla } t \rightarrow \infty \end{cases}$$

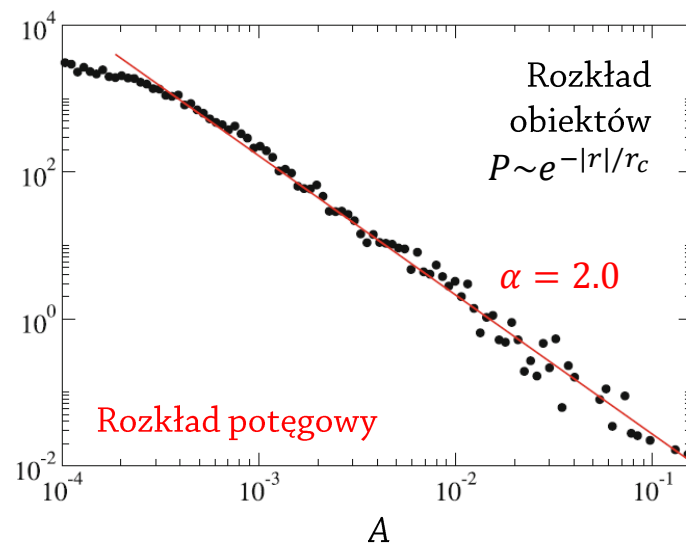
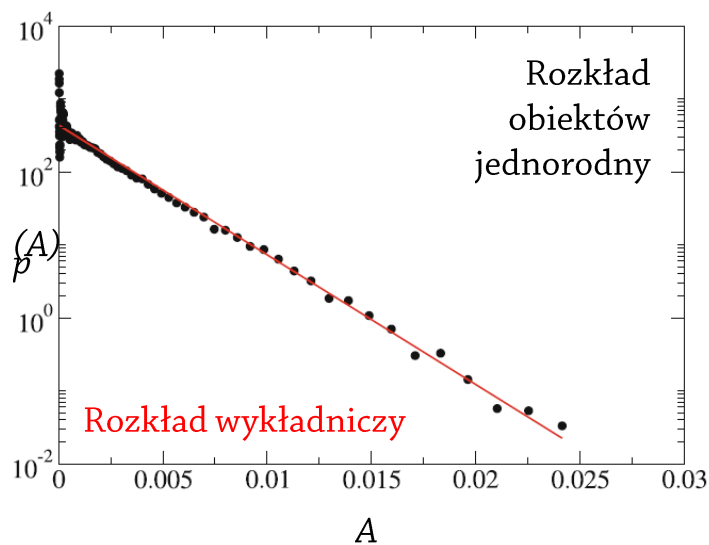
Całkowita długość dróg a liczba skrzyżowań i obiektów $l \sim \sqrt{N}$



Rozkład wielkości komórek



No.	City	Cell size exponent ϵ
1	Berlin	2.158
2	Hamburg	1.890
3	Munich	2.114
4	Cologne	1.922
5	Frankfurt	2.009
6	Dortmund	1.809
7	Stuttgart	1.901
8	Essen	1.932
9	Düsseldorf	1.964
10	Bremen	1.931
11	Hanover	—
12	Duisburg	1.924
13	Leipzig	1.926
14	Nuremberg	1.831
15	Dresden	1.892
16	Bochum	1.829
17	Wuppertal	1.883
18	Bielefeld	1.735
19	Bonn	2.018
20	Mannheim	1.959



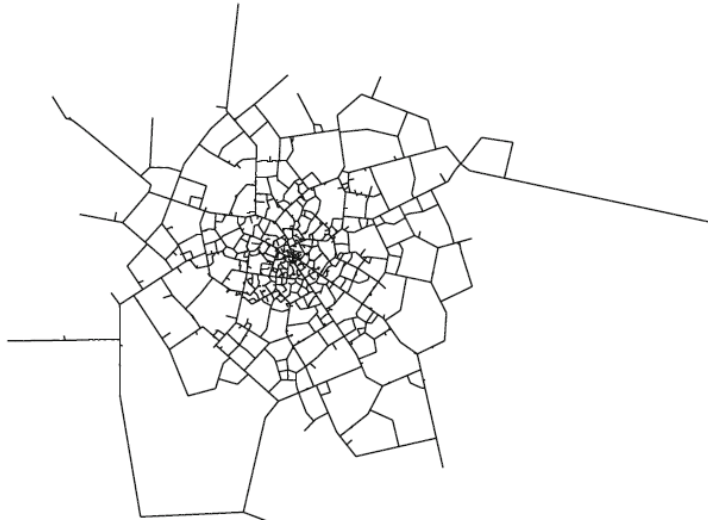
Exponential distribution (denser in center)

100% 100% 100% 100% 100% 100% 100% 100% 100% 100%



Model ewolucji ulic

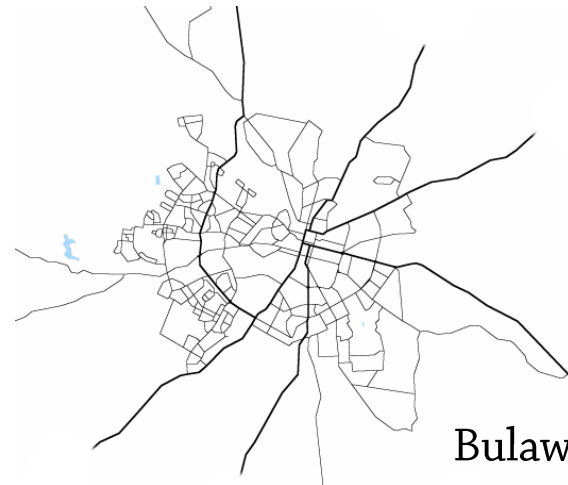
Model posiada upraszczające założenie – obiekty powstają niezależnie od siebie i od istniejącej sieci dróg.



Sokołów Podlaski



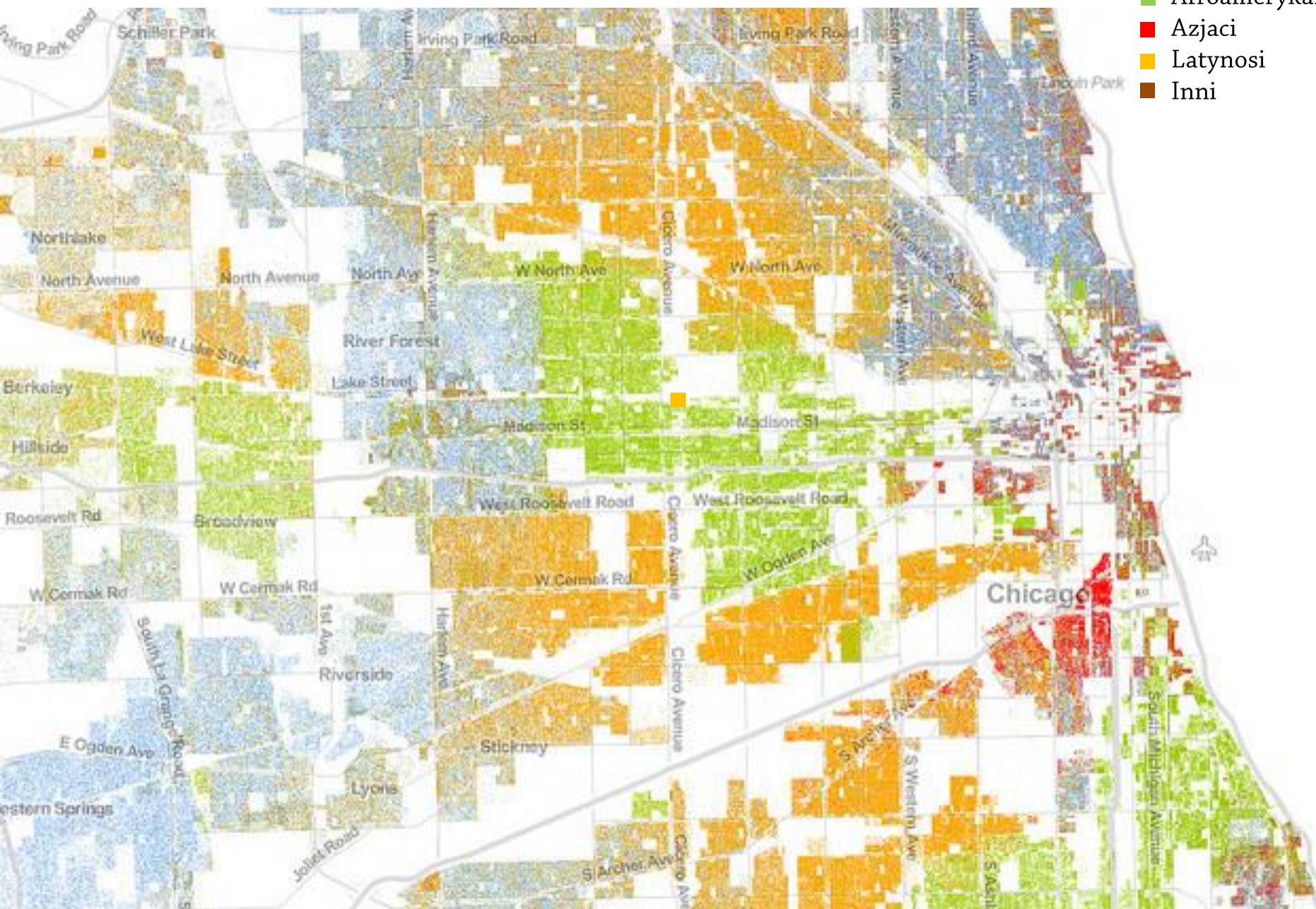
Aleppo



Bulawayo

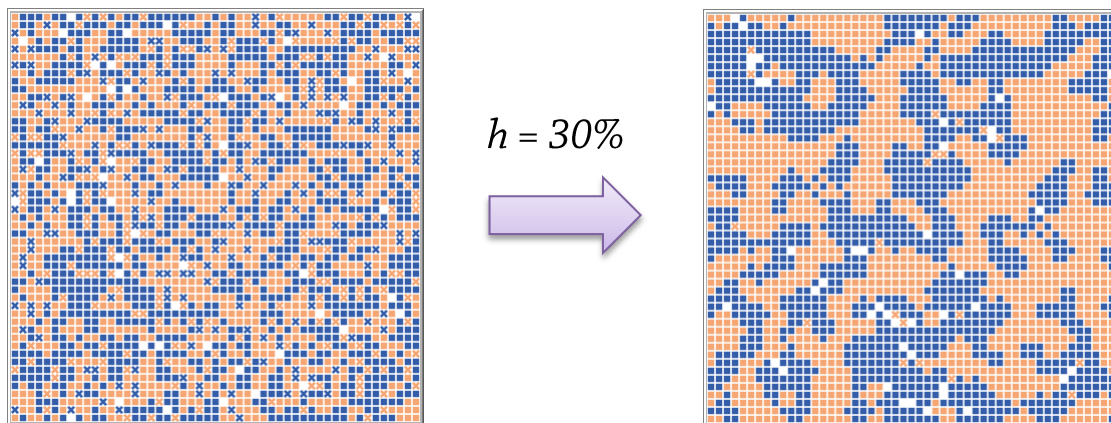
Segregacja

- Biali
- Afroamerykanie
- Azjaci
- Latynosi
- Inni



Model segregacji Schellinga

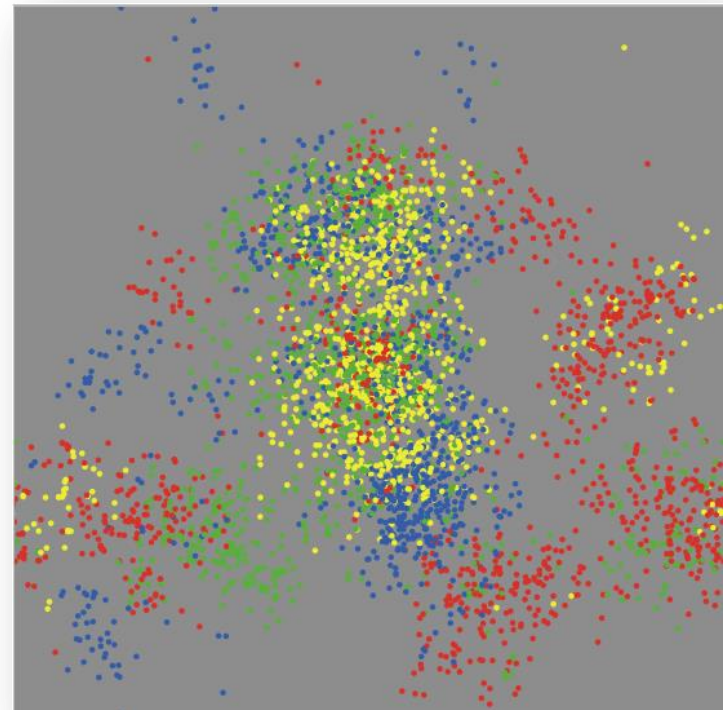
- Dany jest obszar $L \times L$ oraz $N < L^2$ osobników należących do jednej z $M > 1$ klas społecznych.
- Każdy osobnik jest zadowolony, gdy otacza go co najmniej $h\%$ sąsiadów (sąsiedztwo Moore'a) należących do tej samej klasy.
- Gdy osobnik jest niezadowolony, przeprowadza się na puste pole.
- Proces trwa, dopóki istnieją niezadowoleni osobnicy.



Ostra segregacja w amerykańskich miastach nie wynika z decyzji podejmowanych centralnie, a jest wynikiem niezamierzonych działań każdego z mieszkańców, z których nikt nie preferuje ostrej segregacji.

Model preferencyjny miasta

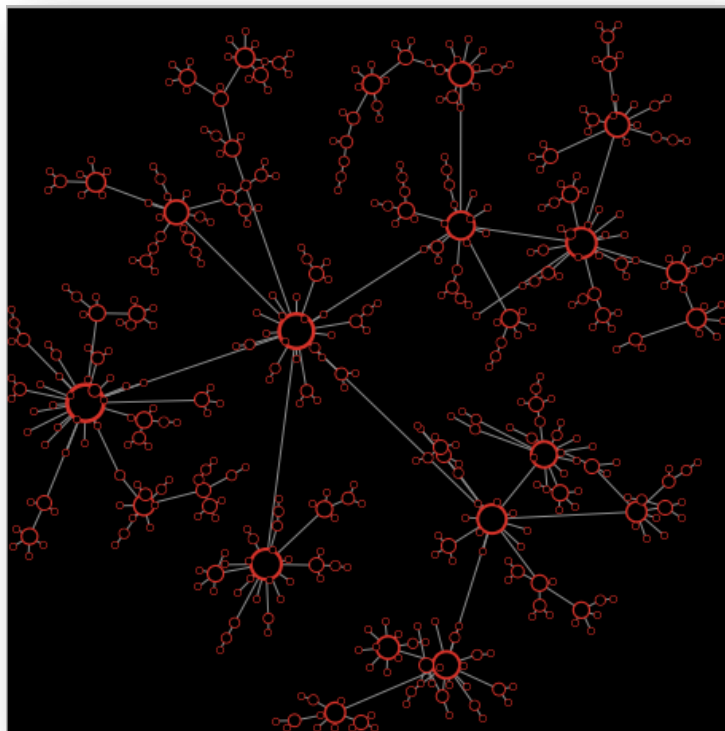
- Każdy nowy budynek powstaje w okolicy, w której znajdują się już budynki.
- efekt św. Mateusza, *rich get richer*, dołączanie preferencyjne
- Prawdopodobieństwo powstania nowego obiektu proporcjonalne do liczby obiektów w okolicy.
- By liczba budynków nie rosła w nieskończoność – losowo usuwamy budynki.



Cztery typy budynków: prawdopodobieństwo powstania nowego obiektu proporcjonalne do liczby podobnych obiektów w okolicy.

Model preferencyjny ewolucji sieci (model BA)

- Każdy nowy węzeł przyłącza się do m istniejących węzłów z preferencją zależną od stopnia węzła.
- Model prowadzi do powstania rozkładów potęgowych stopni węzłów $P(k) \sim k^{-\alpha}$
- Sieci społeczne (sieci znajomości, współpraca między naukowcami lub aktorami, sieci cytowań), Internet, WWW, płatności międzybankowe, międzynarodowa wymiana handlowa, oddziaływania między proteinami, sieci semantyczne, sieci lotnicze, ...



Wyzwanie: model mrowiska

5000 mrówek

4-5 dni

20 kg piasku

Głębokość 3 m

- Równania aktywacji – inhibicji
- Wpływ dwutlenku węgla



Walter R. Tschinkel

The nest architecture of the Florida harvester ant, *Pogonomyrmex badius*
J. Insect Sci. vol. 4, p. 21 (2004)